"Votre cervelle, docteur, est un bouillon de culture pour point d'interrogation!...."

PAUL VALÉRY

Le mieux est d'imaginer Euler comme un grand diagnostiqueur, un docteur de la découverte. Plus que tout, c'est l'extraordinaire *prodigalité* mathématique d'Euler qui en fait un homme du XVII[e] siècle. Il était prêt à diriger gaiement son intelligence vers tout ce qui l'intéressait : casse-tête, petits problèmes, techniques de calcul, curieux petits théorèmes, problèmes complexes, recherches de toutes sortes. Doté d'un don fantastique pour les formules, il voyait dans les symboles tout un monde secret ; il entretenait une vaste correspondance ; il s'amusait de bizarreries mathématiques, son intelligence fonctionnant dans cet univers étrangement harmonieux qui dans l'histoire des mathématiques n'est habité que par Euler, et dans celle de la musique seulement par Mozart. C'est Euler qui vit et comprit que les fonctions exponentielles et trigonométriques étaient liées, et chacune d'elles définissable en faisant appel à l'autre. Et c'est lui qui découvrit la formule la plus belle de toutes les mathématiques : $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Si l'on doit accueillir authentiquement dans son petit grenier de sentiment et de compréhension ce bijoux mathématique _ et les mathématiques connaissent peut d'exemples où l'on frappe si joyeusement à la porte _, il faut être capable d'entendre la grammaire faite musique. Ce qui est en jeu ici, c'est l'audace conceptuelle que l'on trouve dans cette expression mystérieuse et ineffable qui relie les uns aux autres les cinq nombres les plus important de l'univers ; c'est la compréhension que l'on a du caractère parfaitement adéquat du nombre transcendant $e = 2,718281....$, un nombre empreint d'une étrange dignité sicilienne.

Il faut s'efforcer d'élucider d'un point de vue conceptuel pourquoi la définition la plus naturelle de la fonction logarithme, la plus *mathématique,* conduit à la définition la plus naturelle de la fonction exponentielle, qui conduit à son tour au nombre e. le mouvement intellectuel est celui d'une vague écumeuse qui avance pour définir la fonction logarithme, se retire pour révéler la fonction exponentielle et dévoile dans ce mouvement de va-et-vient le nombre e, le joyau noir du Calcul différentiel. Il s'agit de trouver un sens à ce e _ même le plus subtil des auditeurs-grammairiens ne peut qu'essayer _, de dégager quelque chose d'intelligible de sa magie technique, de ce qui rend la cadence du sens énigmatiquement lumineuse, comme ne pourrait le faire aucune autre tournure conceptuelle, aucune autre « déviance » de l'usage quotidien, attendu et érodé.

La formule d'Euler, est un point focal des mathématiques et de la pensée modernes. De manière laconique, les trois vers ci-dessous s'adressent à nos yeux, à nos oreilles, à nos réflexes tactiles autant qu'à notre cérébralité _ mot justement laid. Ces trois vers proclament que :

- Certes ! e et π sont irrationnels autrement dit qu'ils ne sont pas rationnel.

- Certes ! e et π sont transcendants et d'essences trans-logiques, dans le sens où « *trans* » signifie aller au travers, traverser et transgresser, mais réels tout de même _ car en les traversant, il enfilent les énoncés logiques _ donc disposés à se laisser capturer par une fonction.

- Mais hélas ! e et π ne sont pas algébriques sur $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire que e et π ne vérifient aucune équation polynomiale à coefficients rationnels, ce qui est beaucoup plus fort que leurs irrationalités.

Pour le lecteur que ne rebute pas un raisonnement simple des formulations séquentielles, justifions l'irrationalité de e

Montrons que e est irrationnel

On sait que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. Si e est rationnel, en écrivant $e = \frac{p}{q}$, sous forme de fraction irréductible, avec p et q entiers positifs, on aura $p = qe$, d'où pour tout n :

$$p = \sum_{k=0}^{n} \frac{q}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{q}{k!}, \text{ et aussi : } n!p = \sum_{k=0}^{n} q \times \frac{n!}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} q \times \frac{n!}{k!}.$$

Pour $k \leq n$, $q \times \frac{n!}{k!}$ et un entier, donc $n!p - \sum_{k=0}^{n} q \times \frac{n!}{k!}$ est un entier strictement positif, la somme des $q \times \frac{n!}{k!}$, pour $k \geq n+1$ n'étant pas nulle.

Or pour $k \geq n+1$, on a $\frac{n!}{k!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots k} \leq \frac{1}{n^{k-n}}$, donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} q \times \frac{n!}{k!} \leq \frac{q}{n} \times \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{n^r} = \frac{q}{n} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \quad \text{donc} \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} q \times \frac{n!}{k!} \leq \frac{q}{n-1},$$

majorant qui tend vers 0 si n tend vers $+\infty$. En choisissant n tel que $\frac{q}{n-1} \leq \frac{1}{2}$ pour faire notre petit découpage, on obtient $0 < n!p - \sum_{k=0}^{n} q \frac{n!}{k!} = \text{un entier} \leq \frac{1}{2}$: dur, dur à assumer ! **Donc *e* est irrationnel.**

Autre méthode.

En posant $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, la suite des u_n est strictement croissante, de limite e.

En posant $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$, on a : $v_{n+1} - v_n = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0$ pour $n \geq 1$, (et < 0 si $n \geq 2$).

La suite des v_n est décroissante, convergente vers e puisque $\frac{1}{n!}$ tend vers 0.

On a donc, pour tout $n \geq 2$, $u_1 < u_2 < \ldots. < u_n < e < v_n < \ldots. < v_2 = v_1$,

d'où : $u_n < e < v_n$, pour tout $n \geq 1$.

Si e est rationnel, avec $e = \frac{p}{q}$, on aurait : $q!u_q < p \times (q-1)! < q!u_q + 1$, avec $q!u_q$ entier : c'est absurde, l'entier $p \times (q-1)!$ ne pouvant être compris strictement entre deux entiers consécutifs.

Il faut une indéniable musicalité de l'entente interprétative, une oreille attentive aux accords temporels, tels que nous les trouvons chez Euler, pour entendre, pour enregistrer, avec une parfaite ou presque parfaite précision, la vie temporelle et structurelle de ces concepts

Penchons-nous sur le locuteur comme nous le ferions avec un hôte ou un voyageur à la voix fatiguée. Laissons-nous attirer par les richesses de l'indécidabilité. C'est là, à n'en pas douter, l'intention du poète. Nous découvrirons que la norme grammaticale « fait défaut » lorsque est libéré le sens, tout simplement parce que les unités de communication que contient toute occurrence langagière _ les cinq nombres ***e*, π, *i*, 1** et **0**, l'arrangement formel, le code du matériau ou de la notation pertinent _ se retrouvent immédiatement en contexte. Une fois énoncées, elles font appel, elles entrent en interaction avec la totalité de la forme et de substance implicite dans le monde qui les a précédées et dans le monde qui les entoure.

Le jour où j'ai compris que derrière les équations, se cachent des audaces de l'imagination, des sentiments impérieux, qui transcendent la logique et donnent à la science une touche artistique, fut pour moi une nouvelle naissance.

Il suffit de faire un petit pas, et l'on comprend que le travail du scientifique, consiste à construire un partenariat fructueux entre l'imagination et la rationalité. Autrement dit, un jeu s'organise entre d'une part les questions et les solutions produites par l'imagination et d'autre part les contraintes de cohérence du formalisme et de l'observation.

Un pas supplémentaire, et nous épousons l'idée selon laquelle, la science naît de la tension entre ces deux pôles, mais ne se confond pas avec l'un ou l'autre, car elle n'est ni une pure contrainte, ni le droit systématique au rêve.

Il ne nous reste plus qu'à mieux appréhender la méthode scientifique, à savoir : pratiquer la science, c'est penser que description et explication sont deux procédures qui convergent. Adhérer à sa lucidité, c'est penser que la vérité même si elle est inaccessible, est au bout de l'asymptote et que tout progrès de la connaissance en rapproche.
Mieux, le réel est interprété au rythme des oscillations entre l'idée et la chose. Ce qui veut dire que, entre le concret et l'abstrait, un va-et-vient s'organise.

Dès lors, nous n'avons de cesse de corriger notre vision antérieure, et nous sommes tous invités à réfléchir sur ce constat : ne pas prêter attention aux développements de la science et de la technique, négliger leur contrecoup sur nos ressources physiques et mentales, revient à se situer en marge de la raison. Car toute définition d'une civilisation postérieure au classicisme doit apprendre à compter avec le savoir scientifique et avec l'univers des langages mathématiques et symboliques.